

Халиков М. А.

*доктор экономических наук, профессор,
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,
кафедра «Математические методы в экономике», профессор
e-mail: mihail.alfredovich@mail.ru*

Максимов Д. А.

*кандидат экономических наук, доцент,
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,
кафедра «Математические методы в экономике», доцент
e-mail: maksimovdenis@mail.ru*

Многошаговая оптимизация портфеля финансовых активов неинституционального инвестора

Рассматриваются постановка, математическая модель и особенности численного алгоритма решения динамической дискретной задачи оптимизации портфеля финансовых активов неинституционального инвестора. Обоснованы структура и элементное содержание модели, включая критерий оптимальности и ограничения. Приведен численный метод поиска оптимального решения, основанный на локальной оптимизации решения непрерывной задачи. Предложены новый критерий эффективности управления и метод оценки справедливой ставки доходности операций с активами портфеля на выбранном временном горизонте.

Ключевые слова: *неинституциональный инвестор, инвестиционный портфель, задача динамического программирования, дискретная оптимизация, эффективность управления инвестиционным портфелем, справедливая ставка доходности брокера.*

Khalikov M. A.

*Doctor of Science (Economics), Professor,
Plekhanov Russian University of Economics,
Professor at the Department of Mathematical Methods in Economics*

Maksimov D. A.

*PhD (Economics), associate professor,
Plekhanov Russian University of Economics, associate Professor
at the Department of Mathematical Methods in Economics*

Multistage optimization of a non-institutional investor's assets portfolio

The article deals with the statement, mathematical model and features of numerical algorithm of solving the dynamic discrete task for optimization of financial assets portfolio of a non-institutional investor. Structure and element content of the model are substantiated including optimality and limits criteria. It is given a numerical method for search of optimal solution that is based on local optimization of continuous task solving. New criterion of effective management and evaluation method of fair rate of return of operations with assets portfolio within a certain time horizon are offered.

Keywords: *Non-institutional investor, assets portfolio, dynamic programming problems, discrete optimization, effectiveness of portfolio management, broker's fair rate of return.*

Характерной особенностью современного фондового рынка России, являющейся прямым следствием его недостаточной развитости, являются значительные издержки его агентов, связанные с асимметричностью рыночной информации, трудностями оценки реальной стоимости финансовых инструментов, а также необходимостью учета значительно числа альтернатив при формировании инвестиционного портфеля.

По этой причине особую актуальность приобретает проблематика разработки и совершенствования инструментария рационального инвестирования свободных денежных ресурсов участников фондового рынка. Распространенным способом ее решения является формирование и последующее управление инвестиционным портфелем с использованием временно свободной ликвидности, резервируемой для покрытия срочных обязательств, и включающего ценные бумаги различных эмитентов, котирующиеся на фондовом рынке.

Задача моделирования оптимального инвестиционного портфеля, известная как задача Г. Марковица ¹, не нова [3, 4]. На сегодняшний день модель Г. Марковица широко применяется на практике некоторыми отечественными (FINAM, Тройка Диалог, УралСиб, АльфаКапитал, Ренессанс Управление Инвестициями и др.) и зарубежными (UFG Asset Management, Raiffeisen Capital и др.) управляющими компаниями в задачах размещения финансовых активов физических и юридических лиц, а также частных инвесторов, прибегающих к услугам профессиональных брокеров (АЛОП, Антанта Капитал, NetTRADER и др.). Например,

¹ Традиционная постановка задачи оптимизации инвестиционного портфеля в постановке Г. Марковица заключается в выборе набора финансовых активов общей стоимостью не выше заданной, обеспечивающих максимальную доходность при ограничении на риск или минимальный риск при ограничении на доходность. Под доходностью финансового актива понимается средняя доходность за анализируемый промежуток времени, а под риском – среднеквадратичное отклонение (СКО) доходности от среднего значения. Эта мера риска основывается на законе больших чисел и неравенстве Чебышева, согласно которому, чем меньше СКО доходности финансового актива, тем меньше вероятность отклонения доходности от среднего (ожидаемого) значения.

УК FINAM управляет активами инвесторов при помощи ПИФов, каждый из которых характеризуется потенциалом роста входящих в него активов, соотношением в паре «риск-доходность» [8], а также сроками получения ожидаемой прибыли, что позволяет сформировать портфель, соответствующий предпочтениям инвестора [2, 7].

Важной специфической особенностью российского финансового рынка² является то, что в условиях сложной макроэкономической ситуации и высокой (в сравнении с развитыми рынками капиталов) инфляции итоговая доходность практически по всем видам инвестиций превышает инфляцию (табл. 1).

Таблица 1

Финансовые инструменты, доступные российскому инвестору

	Доходность, %	Риск	Ликвидность	Трансакционные издержки, связанные с инструментом
Банковские депозиты	рублевые депозиты – 11,5% годовых; вклады в евро из расчета ставки 8% годовых в пересчете на рубли – 11,8%, долларовые депозиты из расчета 9% годовых – 1,6%	надежные, предполагающие возможность внешнего страхования	высоколиквидные	обслуживание по договору банковского депозита, комиссии за трансакции
Открытые ПИФы акций	8,65% годовых	относительно рисковые	инвестор получает деньги в течение 15 дней после подачи заявки	% ПИФа, скидка, надбавка
Открытые ПИФы облигаций	6,86% годовых	наименее рисковые из ПИФов	инвестор получает деньги в течение 15 дней после определенной даты	% ПИФа
Облигации	16% годовых	менее подвержены рыночному риску	ликвидны, могут быть реализованы в течение 2–3 рабочих дней	брокерское обслуживание
Акции	25% годовых	подвержены рыночному риску	ликвидны	брокерское обслуживание

² Авторы сознательно уходят от текущей ситуации в экономике, которая не дает всестороннего представления о реальной динамике фондового рынка в условиях макроэкономической нестабильности. В связи с этим приведенные в табл. статистические данные являются усредненными за период 1910–1916 гг.

Также необходимо отметить рыночную волатильность, отражающую колебания спроса, предложения и цен финансовых активов и иницирующую целесообразность использования следующей схемы формирования инвестиционного портфеля: «Активы, отличающиеся доходностью³ и ликвидностью⁴, – продаваемые и вновь приобретаемые активы – время владения активами с учетом перечисленных показателей качества».

Другой важный аспект портфельного инвестирования связан с фактором дискретности – инвестиционный портфель включает, как правило, финансовые активы, торгующиеся преимущественно целыми лотами [1, 6].

Далее следует отметить исключительно статичный характер модели Г. Марковица, предназначенной для решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля на выбранном временном интервале, для которого известны цены купли-продажи финансовых активов. Более содержательной, однако, является задача оптимизации инвестиционного портфеля в случае, когда неинституциональный инвестор⁵ с целью получения альтернативного дохода от операций на фондовом рынке, а также для создания вторичного финансового резерва (путем включения в портфель краткосрочных и ликвидных финансовых инструментов) имеет возможность оценивать его параметры и корректировать структуру с учетом текущих и прогнозных изменений курсов ценных бумаг [5].

Рассмотрим содержательную постановку задачи формирования оптимального инвестиционного портфеля неинституционального ин-

³ Под риском далее в работе будем понимать специфический (несистематический) риск, присущий конкретной ценной бумаге и определяемый уровнем волатильности доходности. В этой работе авторы не ставили задачи разработки теоретического подхода анализа и оценки рисков портфельных инвестиций. В дальнейшем будем исходить из предпосылки роста фондового рынка, когда отобранные на этапе экспресс-анализа финансовые инструменты лишены общего рыночного риска и их доходность колеблется в такт с рынком.

⁴ Ликвидность портфеля на временном горизонте $[0; T]$ – доля (в стоимостном выражении) портфеля без учета дисконтированных потоков прибылей и убытков, обеспечивающая обратную конвертацию в денежные средства, либо в денежные суррогаты (финансовый лизинг) на этом горизонте.

⁵ Институциональный инвестор – (англ. Institutional investor) – юридическое лицо, выступающее в роли держателя денежных средств (в виде взносов, паев) и осуществляющее их вложение в ценные бумаги, недвижимое имущество (в том числе права на недвижимое имущество) с целью извлечения прибыли. К институциональным инвесторам относятся инвестиционные фонды, пенсионные фонды, страховые и кредитные союзы (в т. ч. банки). Неинституциональный инвестор – физическое или юридическое лицо, прибегающее к услугам профессиональных участников рынка (брокеров).

вестора, включающего бумаги различных типов (например, обыкновенные и привилегированные акции и облигации) и определенный резерв свободных денежных средств, отложенный на непредвиденные финансовые расходы. Требуется определить оптимальный по критериям «риск-доходность» инвестиционный портфель, характеризуемый также и показателями ликвидности.

В этом случае прямой задачей управления портфелем является максимизация дохода от вложенных в ценные бумаги средств при условии неперевышения изначально задаваемого уровня риска, отражающего реалии складывающейся рыночной конъюнктуры.

Интерес представляет динамический вариант задачи управления инвестиционным портфелем на последовательных временных интервалах $t \in [0, T]$, в каждом из которых объем i -го актива ($i = \overline{1, I}$) в портфеле корректируется с учетом разницы объемов продажи-покупки в результате проводимых на финансовом рынке операций.

В начале интервала t ($t > 1$) (по окончании интервала $t-1$) цены покупки-продажи активов неизвестны, а их прогнозный уровень инвестор устанавливает на основе статистики, накопленной за период времени $[-T_{np}; t-1]$, где T_{np} — предшествующий нулевому периоду временной горизонт мониторинга финансового рынка.

Таким образом, на первом временном интервале инвестор обладает информацией о средних ценах покупки-продажи активов и СКО их отклонений от средних значений, основанных исключительно на исторических данных. Однако, затем, с переходом на новый временной интервал, массив статистических данных растет, что позволяет повысить точность оценок предполагаемых доходности и риска операций с финансовыми активами.

Динамическая модель описывается следующими соотношениями.

1. Начальное состояние инвестиционного портфеля и свободных для инвестирования денежных средств:

$$\bar{V}_i^{(0)} = nv_i, i = \overline{1, I}; \quad (1)$$

$$\bar{L}^{(0)} = L_0, \quad (2)$$

где: $\bar{V}_i^{(0)}$, $\bar{L}^{(0)}$ — соответственно объемы i -го актива и денежных средств инвестора в конце периода $t = 0$ (начале периода $t = 1$).

2. Управление инвестиционным портфелем на шаге t ($t = \overline{1, T}$);

$$\bar{L}^{(t)} = \underline{L}^{(t)} + \sum_{i=1}^I (\overline{ps}_i^{(t)} \cdot x_i^{(t)} - \overline{pr}_i^{(t)} \cdot y_i^{(t)}); \quad (3)$$

$$\bar{V}_i^{(t)} = \underline{V}_i^{(t)} - x_i^{(t)} + y_i^{(t)}, i = \overline{1, I}, \quad (4)$$

где: $\bar{L}^{(t)}, \underline{L}^{(t)}$ – объем свободных для инвестирования в финансовые активы денежные средства соответственно в конце и начале периода t ; $x_i^{(t)}$ – объем продаваемого на шаге t i -го актива ($i = \overline{1, I}$); $y_i^{(t)}$ – объем покупаемого на шаге t i -го актива ($i = \overline{1, I}$); $\overline{ps}_i^{(t)}, \overline{pr}_i^{(t)}$ – средние за период наблюдения (включая период $t-1$) цены соответственно продажи и покупки i -го актива ($i = \overline{1, I}$); $\bar{V}_i^{(t)}, \underline{V}_i^{(t)}$ – объем i -го актива ($i = \overline{1, I}$) соответственно в конце и начале интервала t .

$$\overline{ps}_i^{(t)} = \frac{1}{T_{np}+t-1} \cdot \sum_{\tau=-T_{np}}^{t-1} ps_i^{(\tau)}, i = \overline{1, I}; \quad (5)$$

$$\overline{pr}_i^{(t)} = \frac{1}{T_{np}+t-1} \cdot \sum_{\tau=-T_{np}}^{t-1} pr_i^{(\tau)}, i = \overline{1, I}. \quad (6)$$

3. Пошаговые ограничения на операции с инвестиционным портфелем на шаге t ($t = \overline{1, T}$):

а) на объемы реализуемых и приобретаемых на финансовом рынке активов и неотрицательность баланса инвестиционного портфеля:

$$x_i^{(t)}, y_i^{(t)}, \bar{V}_i^{(t)} \in Z_+, i = \overline{1, I}; \quad (7)$$

$$\bar{L}^{(t)} \geq 0; \quad (8)$$

б) на допустимую величину риска $\sigma^{(t)}$:

$$\sigma^{(t)} = \left(\sum_{i=1}^I ((\sigma_{s_i}^{(t)} \cdot x_i^{(t)})^2 + (\sigma_{r_i}^{(t)} \cdot y_i^{(t)})^2 + 2 \cdot \sum_{i_1, i_2=1}^I (\sigma_{s_{i_1, i_2}}^{(t)} \cdot x_{i_1}^{(t)} \cdot x_{i_2}^{(t)} + \sigma_{r_{i_1, i_2}}^{(t)} \cdot y_{i_1}^{(t)} \cdot y_{i_2}^{(t)})^{1/2} \leq \bar{\sigma}^{(t)}, \quad (9)$$

где: $\sigma_{s_i}^{(t)}, \sigma_{r_i}^{(t)}$ – среднеквадратическое отклонение (СКО) от средних значений, полученных по историческим данным (включая временной интервал $t-1$), цен соответственно продажи и покупки i -го актива ($i = \overline{1, I}$); $\sigma_{s_{i_1, i_2}}^{(t)}, \sigma_{r_{i_1, i_2}}^{(t)}$ – элементы матриц попарных ковариаций цен соответственно продаж и покупок активов с индексами i_1 и i_2 , рассчитанных по историческим данным (включая временной интервал $t-1$); $\bar{\sigma}^{(t)}$ – пороговое значение риска операций с инвестиционным портфелем для временного интервала t .

$$\delta s_i^{(t)} = \frac{1}{T_{np}+t-2} \cdot \left(\sum_{\tau=-T_{np}}^{t-1} (ps_i^{(\tau)} - \overline{ps}_i^{(t)}) \right)^{1/2}, i = \overline{1, I}; \quad (10)$$

$$\delta r_i^{(t)} = \frac{1}{T_{np}+t-2} \cdot \left(\sum_{\tau=-T_{np}}^{t-1} (pr_i^{(\tau)} - \overline{pr}_i^{(t)}) \right)^{1/2}, i = \overline{1, I}; \quad (11)$$

$$\delta S_{i_1, i_2}^{(t)} = \frac{1}{(T_{np} + t - 2) \cdot \delta_{s_{i_1}}^{(t)} \cdot \delta_{s_{i_2}}^{(t)}} \cdot \sum_{\tau = -T_{np}}^{t-1} (ps_{i_1}^{(\tau)} - \overline{ps}_{i_1}^{(t)}) \cdot (ps_{i_2}^{(\tau)} - \overline{ps}_{i_2}^{(t)}), i = \overline{1, I}; \quad (12)$$

$$\delta r_{i_1, i_2}^{(t)} = \frac{1}{(T_{np} + t - 2) \cdot \delta_{r_{i_1}}^{(t)} \cdot \delta_{r_{i_2}}^{(t)}} \cdot \sum_{\tau = -T_{np}}^{t-1} (pr_{i_1}^{(\tau)} - \overline{pr}_{i_1}^{(t)}) \cdot (pr_{i_2}^{(\tau)} - \overline{pr}_{i_2}^{(t)}), i = \overline{1, I}; \quad (13)$$

4. Уравнения перехода:

$$\underline{L}^{(t)} = \overline{L}^{(t-1)}, t = \overline{1, T}; \quad (14)$$

$$\underline{v}_i^{(t)} = \overline{v}_i^{(t-1)}, t = \overline{1, T}. \quad (15)$$

5. Доходность инвестиционного портфеля на шаге t оценивается величиной:

$$\Delta L^{(t)} = \overline{L}^{(t)} - \underline{L}^{(t)} = \sum_{i=1}^I (\overline{ps}_i^{(t)} \cdot x_i^{(t)} - \overline{pr}_i^{(t)} \cdot y_i^{(t)}). \quad (16)$$

Так как инвестор корректирует цены продажи и покупки активов на очередном временном интервале с учетом данных финансового рынка по окончании предыдущего (с единичным лагом), то логично ставить задачу оптимизации инвестиционного портфеля на текущем временном интервале и оценки эффективности управления активами инвестора на всем горизонте операций с портфелем.

Таким образом, если конечное состояние портфеля не закреплено, то задача оптимального управления инвестиционным портфелем на шаге t формулируется как задача дискретного программирования с критерием (16) на максимум доходности операций с портфелем, ограничениями (7)–(9) на целочисленность активов, неотрицательность баланса операций купли – продажи, допустимый риск операций с портфелем, выполнением начальных условий (1)–(2) и пошаговых уравнений (14)–(15), обеспечивающих согласованность баланса активов и денежных средств.

Можно рассмотреть постановку задачи оптимизации инвестиционного портфеля с «закрепленным» конечным состоянием: инвестор определяет список активов $i \in S^T$ из полного набора ($i = \overline{1, J}$), для которых фиксирован объем в портфеле к концу шага T :

$$\begin{aligned} v_i^{(T)} &\geq kv_i, i \in S^T; \\ v_i^{(T)} &\geq 0, i = \overline{1, I} \setminus S^T. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом случае задача динамической оптимизации инвестиционного портфеля с критерием (16) включает ограничения (7)–(9), (17), начальные условия (1), (2) и уравнения перехода (14)–(15).

Оценка эффективности операций с инвестиционным портфелем на плановом горизонте $[0; T]$ определяется потоком доходов PD , приведенным к начальному (нулевому) шагу:

$$PD = -L_0 - \sum_{i=1}^I ps_i^{(0)} \cdot nv_i + \sum_{t=1}^T \frac{\Delta L^{(t)}}{(1+e)^t}, \quad (18)$$

где: $ps_i^{(0)}$ – средняя цена продажи i -го актива ($i = \overline{1, I}$) на нулевом интервале; e – ставка дисконта (альтернативная (по объектам вложения) цена использования капитала инвестора в операциях фондового рынка, например, с низкорискованными активами).

Если для выбранной ставки дисконта $PD \geq 0$ (≤ 0), то можно говорить об эффективном (неэффективном) использовании первоначального капитала инвестора величиной $L_0 + \sum_{i=1}^I ps_i^{(0)} \cdot nv_i$.

Внутреннюю ставку доходности (премию брокера) e_0 по операциям с инвестиционным портфелем на плановом горизонте $[0; T]$ можно найти как наименьшее положительное решение уравнения:

$$-L_0 - \sum_{i=1}^I ps_i^{(0)} \cdot nv_i + \sum_{t=1}^T \frac{\sum_{i=1}^I (\overline{ps}_i^{(t)} \cdot x_i^{(t)} - \overline{pr}_i^{(t)} \cdot y_i^{(t)})}{(1+e_0)^t} = 0. \quad (19)$$

Приведенная в статье многошаговая модель оптимального управления инвестиционным портфелем инвестора (в том числе, и неинституционального), описываемая выражениями (16), (7)–(9), (17), (1)–(2), (14)–(15), относится к моделям динамического программирования Р. Беллмана и может быть решена с использованием известных методов динамической оптимизации. В ее развитии целесообразно рассмотреть возможность учета при принятии брокером инвестиционного решения дополнительного фактора наличия нескольких торговых площадок, что отражается на доходности и риске совокупного портфеля активов. В этой связи можно рассматривать многоуровневую динамическую модель управления инвестиционным портфелем, включающую уровень принятия решения по поводу объемов средств, выделяемых для торгов на той или иной площадке, и уровень выбора инвестиционной стратегии для конкретной площадки [1].

Используемые источники

1. Анतिकоль А.М. Иерархическая оптимизация портфельных инвестиций с учетом фактора дискретности // Ученые записки РАП. Роль и место цивилизованного предпринимательства в экономике России: Сборник научных трудов. – 2010. – Вып. XXIII. – С. 6–16.
2. Бочаров В.В., Леонтьев В.Е. Корпоративные финансы // СПб.: Питер, 2004. – 592 с.

3. Гитман Л.Дж., Джонк М.Д. Основы инвестирования: Пер. с англ. – М.: Дело, 1997. – 1008 с.
4. Грибов А.Ф. Динамические методы обоснования решений по выбору инвестиционных проектов // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 1-4. – С. 570–573.
5. Дорохина Е.Ю., Пантелеев С.С. К вопросу о трех столпах устойчивого развития // Научные труды SWorld. – 2012. – Т. 33. – № 4. – С. 16–21.
6. Закревская Е.А. Подходы и методы оценки стоимости компании в условиях рыночной экономики // Ученые записки Российской Академии предпринимательства. – 2009. – Вып. XVII. – С. 168–177.
7. Фабоцци Ф. Управление инвестициями: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 932 с.
8. Шапкин А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^о», 2003. – 544 с.
9. Viana F.A.C., Venter G., Balabanov V. An algorithm for fast optimal latin hypercube design of experiments // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – Т. 82. – № 2. – С. 135–156.