

Белянкин Г. А.

*кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Исследование операций», факультет ВМК,
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: gbelyank@mail.ru*

Сутина Е. Н.

*аспирант кафедры «Исследование операций», факультет ВМК,
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: utro@mail.ru*

Построение оптимального бонусного плана с кусочно-линейной функцией мотивации в многошаговой игре с полной информацией

В настоящей работе задача взаимодействия работодателя и сотрудника рассматривается в виде игры с полной информацией. Исследуется функция мотивации, которая имеет вид, сходный с реально использующимися бонусными функциями. Строится математическая модель мотивации персонала. Рассматриваются одношаговая и двухшаговая бонусные схемы.

Ключевые слова: мотивация, бонусный план, игры с полной информацией.

Belyankin G. A.

*PhD (Phys-math), Associate Professor, Department of Operations Research,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Moscow State University*

Suetina E. N.

*Postgraduate student, Department of Operations Research,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Moscow State University*

Construction of an optimal bonus plan with the piecewise-linear incentive function in the framework of multistage games with complete information

In present article the problem of interaction between employer and employee is considered as a game with complete information. We study the function of motivation, which is similar

to such functions in the actual HR practice. The mathematical model of personnel motivation is proposed. One-step and two-steps bonus schemes are considered.

Keywords: *motivation, bonus plan, games with complete information.*

Введение

Мотивация персонала — одна из актуальных проблем многих руководителей. Уровень мотивации коррелирует с общей эффективностью работника [1, 14]. Роль денег как фактора мотивации весьма сложна, но они, несомненно, позволяют нанимать лучших сотрудников, а также помогают удерживать их в организации. Система бонусов и поощрений делает связь между доходами сотрудника и его эффективностью более наглядной. Кроме того, мотивированные сотрудники вкладывают силы не только в собственные обязанности, но и в развитие компании в целом [2, 13, 15].

На сегодняшний день в мире активно исследуется природа «рабочей» мотивации, предпринимаются попытки алгоритмизировать и математически обосновать имеющиеся HR-практики. Изучаются связи между мотивацией и вовлеченностью сотрудников [3, 4], влияние климата в коллективе на производительность труда персонала [5]. Задача формализации рабочей мотивации стоит на стыке таких наук как психология, социология, математика, теория контрактов. Многие исследования состоят в статистической обработке данных различных опросов сотрудников [2, 3, 4]. В ряде работ сделаны попытки построения абстрактной модели мотивации [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Особый интерес представляют попытки создания абстрактных математических моделей. Подобные исследования чрезвычайно актуальны при современном положении на рынке труда, когда оптимизация расходов и доходов компании занимает ведущие роли в списке приоритетов развития. Формализованные модели мотивации положат начало развитию различных программных пакетов, способных строго оценить уровень вовлеченности сотрудника, предсказать его эффективность и построить оптимальную стратегию оплаты труда, что будет выгодно и для работодателя, и для работника. Помимо этого, математическая формализация таких понятий как мотивация и вовлеченность представляет большой интерес для психологии и социологии, давая этим наукам дополнительный мощный инструмент для исследований и анализа данных.

Данная работа предлагает математическую модель в рамках классической теории игр [11, 12], исследующую вопросы эффективности одношаговых и многошаговых мотивационных стратегий.

1. Одношаговый бонусный план

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим взаимодействие работника и работодателя как игровую задачу, целью которой является установление рамок труда: $x = (a, b)$, где a – минимальный труд, прописанный в контракте, и b – максимальный труд. Зададим два уровня заработной платы: M_1 – минимальная плата и M_2 – максимальная плата. Тогда функцию заработной платы определим как

$$f(x, y) = \begin{cases} M_1, & y \leq a \\ M_2 - M_1 \frac{y - a}{b - a}, & y \in (a, b) \\ M_2, & y > b \end{cases}$$

где y – возможный труд, $a, b \geq 0$ – некоторые заданные работодателем значения труда.

Вид функции заработной платы представлен на рисунке 1.

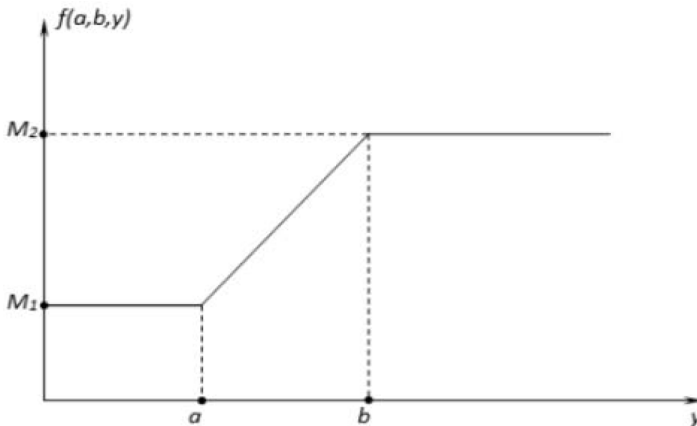


Рисунок 1. Вид функции заработной платы

У работника существует некоторое неудовольствие от работы. Зададим его функцией

$$g(y) = \frac{\gamma y}{c - y}, \quad y \geq 0, \quad \gamma > 0,$$

где $\gamma > 0$ – некоторый коэффициент, позволяющий измерять функцию неудовольствия в деньгах, а $c > 0$ – некоторое предельное значение, при стремлении к которому никакая прибавка к заработной плате не заставит сотрудника работать больше. На рисунке 2 изображен вид функции неудовольствия сотрудника.

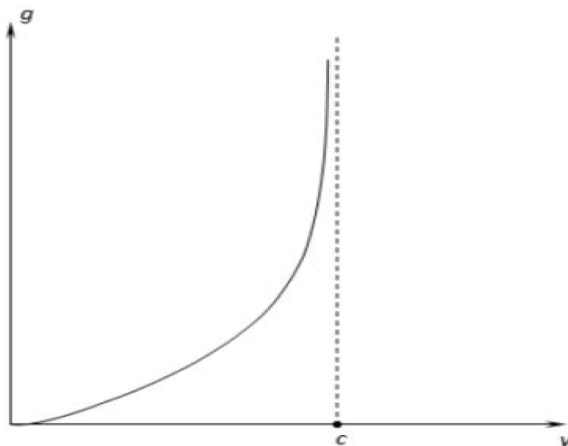


Рисунок 2. Вид функции недовольства сотрудника

Следовательно, имеем ограничения на a, b : $0 \leq a \leq b < c$.

Тогда функция выигрыша работодателя задается следующим образом:

$$F_1(x, y) = \begin{cases} -M_1 + \alpha y, & y \leq a \\ -\frac{M_2 - M_1}{b - a} y + \frac{M_2 a - M_1 b}{b - a} + \alpha y, & y \in (a, b), \\ -M_2 + \alpha y, & y \geq b \end{cases}$$

а функция выигрыша работника имеет вид:

$$F_2(x, y) = \begin{cases} M_1 - \frac{\gamma y}{c - y}, & y \leq a \\ \frac{M_2 - M_1}{b - a} y - \frac{M_2 a - M_1 b}{b - a} - \frac{\gamma y}{c - y}, & y \in (a, b), \\ M_2 - \frac{\gamma y}{c - y}, & y \geq b \end{cases}$$

Задача работодателя – установить для сотрудника такие a и b , что выбранный им труд $y^* \in (a, b)$ будет максимизировать функцию выигрыша работодателя F_1 .

1.2. Решение задачи

Обозначим $M = M_2 - M_1$ и будем решать поставленную задачу как игру Γ_1 .

Найдем точку максимума функции F_2 по y :

$$y^* = c - \sqrt{\frac{\gamma c(b-a)}{M}}.$$

Если $y^* < a$, то работник, зная, что ему гарантирована заработная плата M_1 , не будет трудиться вообще, т.е. выберет $y = 0$. Соответственно, работодатель получит $F_1 = -M_1$.

Если $y^* > b$, то работник не будет работать больше, чем от него максимально требуют, и остановится на $y = b$. Тогда выигрыш работодателя составит $F_1 = -M_2 + ab$.

Для функции F_2 рассмотрим вариант, когда $y^* \in [a, b]$ (см. рисунок 3):

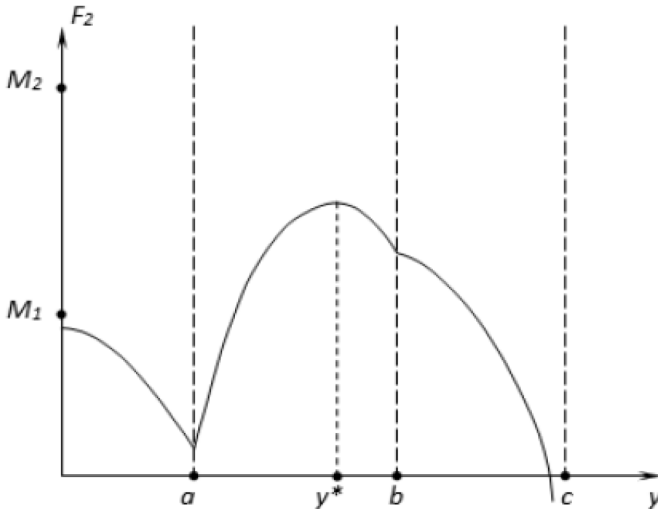


Рисунок 3. Точка максимума y^* функции F_2 лежит в интервале a, b

Ограничения на y^* можно трансформировать в ограничения на a, b вида:

$$\begin{cases} b \leq \frac{M}{\gamma c} a^2 - \left(\frac{2M}{\gamma} - 1 \right) a + \frac{Mc}{\gamma} \\ a \leq -\frac{M}{\gamma c} b^2 + \left(\frac{2M}{\gamma} + 1 \right) b - \frac{Mc}{\gamma} \end{cases}.$$

Дополнительно имеем ограничение $F_2(y^*) > M_1$ — только в этом случае работнику выгодно трудиться больше:

$$F_2(y^*) = \frac{M}{b-a} \left(c - \sqrt{\frac{\gamma c(b-a)}{M}} \right) - \frac{aM_2 - bM_1}{b-a} - \frac{c \sqrt{\frac{\gamma c(b-a)}{M}}}{\sqrt{\frac{\gamma c(b-a)}{M}}} > M_1.$$

Сделав замены переменных, можно свести имеющиеся ограничения к более простому виду и построить область, ограниченную этими тремя неравенствами. Внутри построенной области функция выигрыша работодателя F_1 не имеет экстремума. Значит, экстремум находится на границе области. Подставив поочередно каждую границу, получим две точки:

$$\left(a = \frac{cM^2}{(M+\gamma)^2}, b = \frac{cM}{M+\gamma} = y^* \right),$$

$$\left(a = c \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha c}} - 1 \right)^2, b = \frac{M}{\alpha} + c \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha c}} - 1 \right)^2 \right), y^* = c - \sqrt{\frac{\gamma c}{\alpha}}.$$

Подставив обе эти точки в функцию F_1 , получим, что для рассматриваемого нами случая $y^* \in (a, b)$ своего максимума функция выигрыша работодателя достигает в точке

$$\left(a = c \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha c}} - 1 \right)^2, b = \frac{M}{\alpha} + c \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha c}} - 1 \right)^2 \right).$$

Таким образом, было показано, что отдача сотрудника увеличивается, если используется мотивация, описанная кусочно-линейной функцией.

2. Двухшаговый бонусный план

2.1. Постановка задачи

Пусть работодатель пытается мотивировать сотрудника в два шага: на первый период и на второй период работы. Причем мотивацию строит таким образом, что на втором шаге она зависит от выбора работника на первом шаге. Работнику установлены границы a_1, b_1, a_2, b_2 , причем a_2, b_2 зададим путем сдвига a_1, b_1 на $\beta y_1(a_1, b_1)$, где $\beta \in [-1, 1]$ — некоторый параметр. При этом размеры минимального и максимального поощрения M_1, M_2 остаются неизменными. Проверим, выгодно ли работодателю менять мотивацию работника на втором периоде, или же имеет смысл на оба периода мотивировать согласно результатам первого шага.

Заработная плата работника в зависимости от затраченного труда y_1 и y_2 на первом и втором периодах работы будет иметь вид:

$$f_1(a_1, b_1) - \frac{M_2 - M_1}{b_1 - a_1} y_1(a_1, b_1) - \frac{M_2 a_1 - M_1 b_1}{b_1 - a_1},$$

$$f_2(a_1, b_1) = \frac{M_2 - M_1}{b_1 - a_1} y_2(a_1, b_1) - \frac{M_2 a_1 - M_1 b_1 + (M_2 - M_1)\beta y_1(a_1, b_1)}{b_1 - a_1}.$$

Тогда функция выигрыша работодателя при двухшаговой мотивации имеет вид:

$$F_1 = \begin{cases} -2M_1 + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 < a_1, y_2 < a_2 \\ -f_1(a_1, b_1) - M_1 + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 \in [a_1, b_1], y_2 < a_2 \\ -M_2 - M_1 + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 > b_1, y_2 < a_2 \\ -M_1 - f_2(a_1, b_1) + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 < a_1, y_2 \in [a_2, b_2] \\ -f_1(a_1, b_1) - f_2(a_1, b_1) + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 \in [a_1, b_1], y_2 \in [a_2, b_2] \\ -M_2 - f_2(a_1, b_1) + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 > b_1, y_2 \in [a_2, b_2] \\ -M_1 - M_2 + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 < a_1, y_2 > b_2 \\ -f_1(a_1, b_1) - M_2 + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 \in [a_1, b_1], y_2 > b_2 \\ -2M_2 + \alpha(y_1 + y_2) & , \quad y_1 > b_1, y_2 > b_2 \end{cases}$$

Пусть $g(y)$ – функция неудовольствия работника (см. рисунок 2). Тогда функция выигрыша работника при двухшаговой модели имеет вид:

$$F_2 = \begin{cases} 2M_1 - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 < a_1, y_2 < a_2 \\ f_1(a_1, b_1) - M_1 - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 \in [a_1, b_1], y_2 < a_2 \\ M_2 + M_1 - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 > b_1, y_2 < a_2 \\ M_1 + f_2(a_1, b_1) - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 < a_1, y_2 \in [a_2, b_2] \\ f_1(a_1, b_1) + f_2(a_1, b_1) - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 \in [a_1, b_1], y_2 \in [a_2, b_2] \\ M_2 + f_2(a_1, b_1) - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 > b_1, y_2 \in [a_2, b_2] \\ M_1 + M_2 - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 < a_1, y_2 > b_2 \\ f_1(a_1, b_1) + M_2 - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 \in [a_1, b_1], y_2 > b_2 \\ 2M_2 - g(y_1) - g(y_2) & , \quad y_1 > b_1, y_2 > b_2 \end{cases}$$

2.2. Решение задачи

Будем решать эту задачу как двухшаговую игру. Приравняв производные $(F_2)'_{y_2}$ и $(F_2)'_{y_1}$ к нулю, найдем точку максимума труда на втором и первом периодах мотивации:

$$y_2^* = c - \sqrt{\frac{\gamma c(b_1 - a_1)}{M}}, \quad y_1^* = c - \sqrt{\frac{\gamma c(b_1 - a_1)}{M(1 - \beta)}}.$$

Рассмотрим случай $y_1 \in [a_1, b_1]$, $y_2 \in [a_2, b_2]$. Построим функцию выигрыша работодателя F_1 в системе Maple 15 (см. рисунок 4).

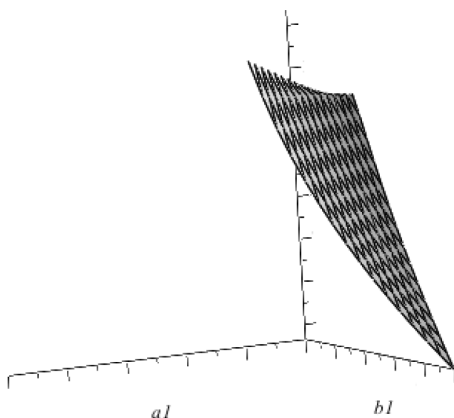


Рисунок 4. Функция выигрыша работодателя F_1

Можно видеть, что она возрастает, и какой бы областью ее ни ограничили, она будет иметь максимум на границе этой области. Построим в системе WolframMathematica 9.0 область в измерениях (a_1, b_1) , по которой требуется максимизировать функцию F_1 (см. рисунок 5). Напомним, что эта область получается из ограничений

$$y_1 \in [a_1, b_1], y_2 \in [a_2, b_2], F_2(y_1^*, y_2^*) > 2M_1.$$

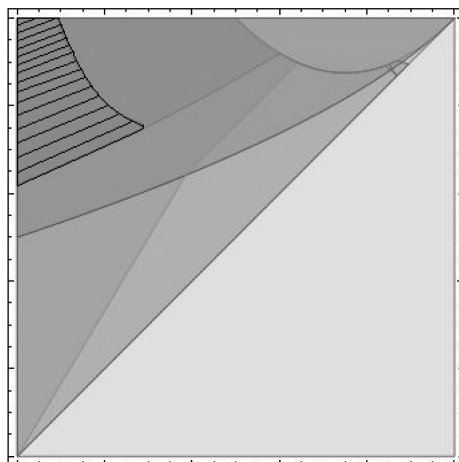


Рисунок 5. Область, по которой максимизируем функцию F_1

На полученной области построим функцию F_1 (рисунок 6):

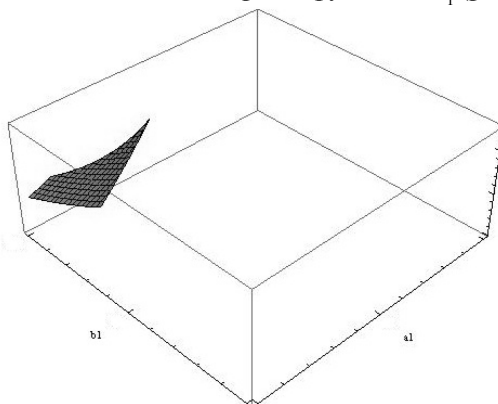


Рисунок 6

Численно посчитаем максимум функции выпирыва работодателя методом покоординатного спуска. Проведем оптимизацию по параметру β и получим, что $\beta^* = 0$, т.е. работодателю невыгодно менять мотивацию уже на втором шаге схемы.

Заключение

В работе была предложена математическая модель построения оптимального бонусного плана. Для одношаговой схемы было доказано, что кусочно-линейная функция мотивации может заставить работника трудиться больше. Для двухшаговой схемы с линейным сдвигом было показано, что такая схема перед одношаговой схемой преимуществ не имеет.

К достоинствам данной модели можно отнести простоту и обоснованность, а также приближенный к реальному вид функции мотивации.

К недостаткам модели относятся неопределенности в вычислении коэффициентов (α , γ , c) и значительный рост сложности при увеличении числа «периодов» в схеме.

В качестве дальнейших исследований целесообразно вводить стохастичность успеха в работе, за который полагается вознаграждение, а также рассматривать схемы с непрерывной функцией мотивации.

Список литературы

1. AzinTaghipour, ReihaneDejban. Job Performance: Mediate Mechanism of Work Motivation: 3rd World Conference on Psychology, Counselling and Guidance, 2012.

2. Robertson-Smith, G. and Markwick. Employee Engagement A review of current thinking: Institute for employment studies mantel building university of Sussex campus, 2009.
3. Juan D. Velósquez. Modeling Emotions and Other Motivations in Synthetic Agents: American Association for Artificial Intelligence, 1997.
4. Marisa Salanova, Sonia Agut, Joser Mar'ra Peiro. Linking Organizational Resources and Work Engagement to Employee Performance and Customer Loyalty: The Mediation of Service Climate: Journal of Applied Psychology. – 2005. – Vol. 90, No. 6. – P. 1217–1227.
5. Andrew W. Bausch. Evolving intergroup cooperation: Springer Science+Business Media New York, 2013.
6. Котляров И.Д. Векторная модель мотивации к труду: Механизм регулирования экономики. – 2006. – № 4.
7. Белянкин Г.А., Таразевич А.В. Исследование оптимального контракта в задаче мотивирования агентов принципалом в модели с двумя агентами и случайным исходом: Научная конференция «Тихоновские чтения»: Тезисы докладов. – М., 2011.
8. Белянкин Г.А., Белянкина Т.В., Таразевич А.В. Математическое моделирование оптимального поведения принципала и агента при отсутствии ограничений на функцию вознаграждения // Игровые постановки задачи «агент-принципал» для разных условий информированности игроков. – М.: МАКС-Пресс, 2011.
9. Афанасьева И.С., Белянкин Г.А., Белянкина Т.В., Таразевич А.В. Математическое моделирование оптимального поведения принципала и агента при различных ограничениях на функцию вознаграждения // Игровые постановки задачи «агент-принципал» для разных условий информированности игроков. – М.: МАКС-Пресс, 2011.
10. Белянкин Г.А., Белянкина Т.В., Таразевич А.В. Математическое моделирование оптимального поведения принципала и агента при различных ограничениях на функцию вознаграждения в модели с n агентами // Игровые постановки задачи «агент-принципал» для разных условий информированности игроков. – М.: МАКС-Пресс, 2011.
11. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. – М.: МАКС Пресс, 2005.
12. Морозов В.В. Основы теории игр. – М., 2002.
13. Балабанова А.В., Киселева О.Н. Средний класс и его ключевая роль в развитии цивилизованных рыночных отношений // Ученые записки Российской академии предпринимательства. – 2013. – № 35.
14. Грызенкова Ю.В., Журавин С.Г., Соломатина А.С. Стратегическое управление персоналом в страховых компаниях: проблемы, теория и практика. – М.: МАКСС Групп, 2012.
15. Соломатина А., Журавин С., Цыганов А. Стратегическое управление персоналом в страховой компании: мотивация к инновациям // Проблемы теории и практики управления. – 2012. – № 7–8.