Болдин Б. С.

*главный экономист,
Центральный банк Российской Федерации
e-mail: boldinboris@mail.ru*

Модель функционирования банковской системы

Строится модель оптимального поведения банковской системы на основе теории оптимального управления, а также проведенного эконометрического анализа движения основных видов финансовых инструментов в банковской системе. Модель успешно воспроизводит реакцию банковской системы на неожиданные события, такие, например, как мировой финансовый кризис. Предлагается математическое описание функционирования российской банковской системы, пригодное для использования в более общей модели экономического равновесия.

Ключевые слова: *модель, эконометрический анализ, теория оптимального управления, банковская система, финансовые инструменты.*

Boldin B. S.

*chief economist,
Central bank of the Russian Federation*

Mmodel of banking system functioning

In this article we provide a model of optimum banking system behavior using optimum management theory and also using econometric analysis of the movement of major types of financial instruments in banking system. This model successfully shows us reaction of banking system on such events as worlds financial crisis. Also here is a description of banking system functioning which is useful in more common econometrical model of balance.

Keywords: *model, econometrical analysis, optimum management theory, banking system, financial instruments.*

В силу особенности российской банковской системы будем рассматривать модель всей банковской системы как модель одного банка. В результате исследования мы сведем описание его деятельности к обычной динамической модели, определяющей спрос банковской системы на депозиты и предложение ею кредитов в зависимости от текущего состояния, а также от складывающихся на рынке процентов и других внешних факторов.

Итак, рассмотрим банк, который к моменту t привлек депозиты $S(t)$ и выдал ссуды $L(t)$. Средние сроки, на которые привлекаются де-

позиты и выдаются кредиты (дюрации), обозначим соответственно через $1/\beta_s(t)$ и $1/\beta_l(t)$. Тогда процесс изменения ссуд и депозитов (остатков) описывается уравнениями.

$$\frac{d}{dt}L(t) = K(t) - \beta_l L(t), \quad \frac{d}{dt}S(t) = V(t) - \beta_s S(t),$$

где $K(t) \geq 0$, $V(t) \geq 0$ – потоки вновь выданных кредитов и вновь привлеченных вкладов. Считаем, что по выданным ссудам банк получает процентные платежи $r_l(t)L(t)$, где $r_l(t)$ – эффективная ставка процента по ссудам, а за привлеченные средства банк платит проценты $r_s(t)S(t)$, где $r_s(t)$ – эффективная ставка процента по депозитам.

Кроме депозитов $S(t)$ банк привлекает еще средства в виде беспроцентных остатков расчетных счетов $N(t)$. Для величины этих остатков нет регулирующей величины типа процента, и банк должен просто ориентироваться на предложение со стороны клиентов. Поэтому эту величину считаем заданной экзогенно.

$$N(t) = N_n(t),$$

где $N_n(t)$ – известное банку предложение остатков расчетных счетов.

Привлеченные средства $S(t) + N_n(t)$ банк должен резервировать в ЦБ. Обозначая через $\xi(t)$ норму резервирования, получаем, что

$$Rc(t) = \xi(t)(S(t) + N_n(t)).$$

Сверх обязательных бесплатных резервов $Rc(t)$ банк вкладывает в ЦБ еще и средства $Lc(t)$ под процент $r_c(t)$. Депозиты в ЦБ краткосрочные, поэтому их дюрацию не учитываем.

$$Lc(t) \geq 0$$

вводим в модель следующее ограничение на деятельность банка

$$L(t) + Lc(t) + \xi(t)(S(t) + N_n(t)) \leq S(t) + N_n(t).$$

Ликвидные активы банка $W(t)$ увеличиваются при получении процентов $r_l(t)L(t)$, $r_c(t)Lc(t)$, вкладов $V(t)$, приращении остатков $N(t)$ и возврате ссуд $\beta_l(t)L(t)$ а уменьшаются при выдаче кредитов $K(t)$, выплате процентов $r_s(t)S(t)$, возврате депозитов $\beta_s(t)S(t)$, вложении

средств в ЦБ $\frac{d}{dt}Lc(t)$, а также за счет средств $\pi(t)$, выводимых из круга

собственно банковской деятельности.

$$\frac{d}{dt} W(t) = r_i(t)L(t) + \beta_l(t)L(t) - K(t) - r_s(t)S(t) - \beta_s(t)S(t) + \frac{d}{dt} N(t) - \frac{d}{dt} Lc(t) + r_c(t)Lc(t) - \pi(t).$$

Поток $\pi(t)$ состоит из дивидендов собственникам, налоговых платежей, инвестиций в основные фонды (включая участие в собственности), а также операционных расходов. Эти потоки (кроме, может быть, налогов) не связаны напрямую с активами и пассивами банка, и мы попытаемся построить модель, не вдаваясь в подробное описание структуры потока $\pi(t)$. Мы будем трактовать этот поток как извлекаемую из банковской деятельности прибыль, которую банк стремится максимизировать.

Эти соотношения представляют собой ограничения, наложенные в рамках модели на возможности банка выбирать значения своих планируемых переменных (управлений):

$$S(t), L(t), W(t), K(t), V(t), \pi(t), Lc(t).$$

Согласно принципу рациональных ожиданий, лежащему в основе моделей экономического равновесия, при планировании своих управляющих переменных банк может рассчитывать на точный прогноз информационных переменных:

$$\xi(t), r_i(t), r_s(t), r_c(t), \beta_s(t), \beta_l(t), N_n(t).$$

В результате, выбор планируемых переменных банком фактически задает предложение им кредитов, а также его спрос на привлеченные и ликвидные средства как функцию от текущих и будущих значений информационных переменных (в первую очередь, процентов).

Теперь, чтобы поставить задачу об оптимальном поведении банка, следует определить критерий выбора планируемых переменных. Согласно современному подходу весьма универсальным описанием интересов экономического агента можно считать стремление к максимизации собственной капитализации, которое, в свою очередь, может быть сведено к задаче максимизации потока полезных доходов (в данном случае $\pi(t)$), а также собственного капитала в конечный момент времени θ :

$$\int_0^T \pi(L(t), S(t)) dt + \theta(L^T, S^T, T) \rightarrow \max_{K, V}$$

по переменным (6) при ограничениях (1)–(5) на некотором интервале $[t_0, T]$, заданных в начальный момент значениях фазовых переменных $S(t_0), L(t_0), W(t_0)$ и заданных траекториях изменения экзогенных величин.

В работе рассмотрена упрощенная (по числу ограничений) задача оптимального поведения банковской системы как задача оптимального управления.

Задача оптимального управления банком

$$\int_0^T \pi(L(t), S(t)) dt + \theta(L^T, S^T, T) \rightarrow \max_{K, V}$$

$$\begin{cases} \frac{dL(t)}{dt} = K(t) - \beta_l L(t) \\ \frac{dS(t)}{dt} = V(t) - \beta_s S(t) \\ L(0) = L_0, \end{cases}$$

$$S(0) = S_0, \quad K \geq 0, \quad V \geq 0.$$

Предложен алгоритм ее решения на основе применения принципа максимума с учетом функции Гамильтона и краевой задачи принципа максимума:

$$H = \theta(L^T, S^T, T) + k(t)(L'(t) - K + \rho(t)(S' - [V(t) + \beta] S(t)))$$

Краевая задача принципа максимума

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial H}{\partial k} \rightarrow \frac{dL(t)}{dt} = K(t) - \beta_l L(t), \quad L(0) = L_0,$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L} \rightarrow \frac{dS(t)}{dt} = V(t) - \beta_s S(t), \quad S(0) = S_0,$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L} \rightarrow \frac{dk(t)}{dt} = -\beta_l k(t), \quad k(T) = k^T,$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial S} \rightarrow \frac{d\rho(t)}{dt} = -\beta_s \rho(t), \quad \rho(T) = \rho^T,$$

где $L(t)$ – кредиты;

$S(t)$ – депозиты;

β_l, β_s – обратные дюрации по кредитам и депозитам, соответственно;

$K(t)$ – вновь выданные кредиты;

$V(t)$ – вновь привлеченные депозиты;

$k(t)$ – сопряженная переменная по кредитам;

$\rho(t)$ – сопряженная переменная по депозитам;

π – прибыль;

θ – собственный капитал;

На основе анализа задачи оптимального управления разработана эконометрическая модель банковской системы, с помощью которой определялись следующие выходные переменные $L(t)$, $W(t)$, $Lc(t)$.

Решение задачи об оптимальном поведении банка

При идентификации модели в качестве t_0 следует выбирать момент начала наблюдений, в качестве T – конец прогнозируемого периода.

Каждому из ограничений ставится в соответствие двойственная переменная, составляется функционал Лагранжа и выписываются условия его седловой точки, которые представляют собой систему достаточных условий оптимальности. Эти условия распадаются на 4 группы:

а) исходные дифференциальные уравнения, (начальные условия для них считаются заданными);

б) сопряженные дифференциальные уравнения для переменных, двойственных к исходным дифференциальным уравнениям;

в) условия трансверсальности, которые определяют терминальные условия для сопряженных дифференциальных уравнений;

г) условия дополняющей нежесткости для неравенств

В рамках модели банка величина привлеченных депозитов точно совпадает с наблюдаемой $S(t) = S_s(t)$, исключаем ненаблюдаемую величину $V(t)$. После этого заменяем производные по времени на запаздывающие разности с шагом в один месяц. В результате получается система для определения неизвестных величин $L(t)$, $W(t)$, $K(t)$, $Lc(t)$, состоящая из:

а) двух разностных уравнений для $L(t)$, $W(t)$ с соответствующими начальными условиями;

б) двух разностных уравнений для переменных $k(t) \geq 0$ и $\rho(t) \geq 0$

в) условий дополняющей нежесткости к неравенствам $K(t) \geq 0$.

Всякое условие дополняющей нежесткости может быть записано как вырожденная функциональная зависимость прямой переменной от двойственной.

$K = \infty$ при $k < 0$, $K \geq 0$ при $k = 0$, $K = 0$ при $k > 0$.

С экономической точки зрения эта зависимость задает бесконечно эластичную функцию предложения банком новых кредитов в зависимости от некой внутренней оценки $k(t)$, имеющей размерность процента. Считая, что оптимизационная задача дала нам главное – нетривиальное выражение аргумента функции спроса, форму этой функции позволим себе подбирать эмпирически. Иначе говоря, мы заменяем идеальное соотношение невырожденной зависимостью

$$K(t) = ML(k(t))(S_s(t) + N_n(t)),$$

в которой параметры монотонно убывающей функции $ML(\cdot)$ определяем в процессе идентификации модели. Аналогичным образом поступаем и с остальными условиями дополняющей нежесткости.

В процессе идентификации модели выясняется замечательный факт: при тех значениях параметров, при которых модель хорошо воспроизводит наблюдаемые траектории, динамические уравнения на двойственные переменные $k(t)$ и $\rho(t)$ могут быть заменены квазистационарными выражениями этих переменных. Этот факт не только сильно упрощает модель, но и имеет важнейшее содержательное значение. Модель строилась на основе принципа рациональных ожиданий, т.е. в предположении, что банк знает будущие значения процентных ставок и других информационных переменных. Формально это выражалось в необходимости решать динамические уравнения для $k(t)$ и $\rho(t)$ с терминальными, а не с начальными условиями. После идентификации, однако, математические свойства этих уравнений оказываются такими, что зависимость от будущего становится несущественной, а величины $k(t)$ и $\rho(t)$ фактически определяются только текущими значениями информационных переменных. Модель рациональных ожиданий сводится к обычной динамической системе, но от оптимизации остаются нетривиальные выражения для аргументов функций спроса и предложения.

Окончательно система соотношений модели, определяющей выходные переменные $L(t)$, $W(t)$, $Lc(t)$, выглядит следующим образом:

$$\tau_w \Delta W(t) = W(t) - \tau_s \beta_s(t) S_s(t) - MW(\rho(t))(S_s(t) + N_n(t))$$

$$\Delta L(t) = ML(k(t))(S_s(t) + N_n(t)) - \beta_l L(t)$$

$$Lc(t) = (E(t) - \xi(t))(S_s(t) + N_n(t)) - L(t)$$

Здесь ML , MW – функции, приближающие условия дополняющей нежесткости. Они выбирались линейными или квадратичными.

Используемые источники

1. Грибов А.Ф. Моделирование банковской деятельности: Учебно-методическое пособие для дистанционной формы обучения. – М.: Изд-во РЭА им. Г.В. Плеханова, 2004.
2. Роджер Лерой Миллер, Дэвид Д. Ван-Хуз. Современные деньги и банковское дело: Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2000.